Н.Н. Ташатов

Дискретизация и восстановление сигналов

(*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана*)

В данной статье рассматриваются вопросы дискретизации и восстановления непрерывных сигналов: постановка задачи дискретизации, равномерная дискретизация по частотному критерию, квантование сигналов, а также восстановление непрерывного сигнала и критерии качества восстановления сигналов.

Введение.

Поступающую любую информацию можно хранить, обрабатывать и передавать как в виде непрерывных сигналов, так и в виде дискретных сигналов. На современном этапе развития информационной техники предпочтение отдается дискретным сигналам. Поэтому непрерывные сигналы преобразуют в дискретные сигналы. Каждый непрерывный сигнал проверяется операцией квантования по времени и по уровню. Квантование по времени называется *дискретизацией*, а квантование по уровню – *квантованием.*

Под дискретизацией подразумевают, преобразование функции непрерывного времени в функцию дискретного времени, представляемую совокупностью величин, называемых координатами, по значениям которых исходная функция может быть восстановлена с заданной точностью. Роль координат могут выполнять мгновенные значения функции, отсчитанные в определенные моменты времени.

Под квантованием понимают преобразования некоторой величины с непрерывной шкалой значений в величину, имеющую дискретную шкалу значений. Оно сводится к замене любого мгновенного значения одним из конечного множества разрешенных значений, называемых уровнями квантования.

Причины перехода к дискретному и цифровому выражению информации заключаются в следующем.

1. Для решения конкретных задач исследования интересующего нас объекта обычно требуется значительно меньше информации, чем ее может поступить с датчиков в виде непрерывных сигналов. Можно ограничиться отсчетами, взятыми через определенные моменты времени.

2. При неизбежных флуктуациях во времени и конечной погрешности средств измерения информация о величине сигнала в каждый момент отсчета всегда ограничена, что позволяет обойтись конечным числом уровней квантования. Кроме того, специфика решаемых задач часто такова, что позволяет ограничиться значительно меньшим числом уровней.

3. В большинстве случаях информация извлекается и передается с целью дальнейшей обработки средствами цифровой техники. Рациональное выполнение операций дискретизации и квантования позволяет снизить затраты на хранение и обработку полученной информации.

4. При передаче и обработке информации в цифровой форме существует принципиальная возможность снижения вероятности получения ошибочного результата до весьма малых значений. Во-первых, применимы такие методы

кодирования, которые обеспечивают обнаружение и исправление ошибок, а во-вторых, квантованный сигнал легко восстановить до первоначального уровня всякий раз, когда величина накопленных искажений приблизится к половине кванта.

5. Выражение информации в цифровой форме облегчает унификацию операций ее преобразования. Простота настройки типовых узлов, отсутствие необходимости регулировки в процессе эксплуатации позволяют уменьшить стоимость их изготовления и эксплуатации, а также надежность.

Снижение стоимости и увеличение надежности интегральных схем являются мощным стимулом дальнейшего расширения областей использования цифровых сигналов [1].

Постановка задачи дискретизации.

Запишем представление непрерывного сигнала $u(t)$ на интервале T совокупностью координат (c_1 ,c_2, …, c_N) в виде

$$(c_1, c_2, \ldots, c_N) = A[u(t)], \tag{1}$$

где A – оператор дискретного представления сигнала, реализуемый устройством, называемым дискретизатором.

Аналогично запишем и операцию восстановления по совокупности координат (c_1 ,c_2, …, c_N) непрерывной функции $u^*(t)$, которую называют воспроизводящей функцией:

$$u^*(t) = B[(c_1, c_2, \ldots, c_N)], \tag{2}$$

где B – оператор восстановления, реализуемый устройством восстановления сигнала.

Воспроизводящая функция отображает исходный сигнал с некоторой текущей погрешностью приближения

$$\delta(t) = u(t) - u^*(t). \tag{3}$$

Задача дискретизации сводится к совместному выбору пары операторов A и B, обеспечивающих точность восстановления сигнала.

Широкое практическое применение нашли линейные операторы. Для определения координат сигнала используется уравнение

$$C_j = \int_T \xi_j(t) u(t) dt = A_u(t), \tag{4}$$

где $\{\xi_j(t)\},\ j=1,\dots,N$ – система функций, которые называются весовыми.

Воспроизводящая функция представляется аппроксимирующим многочленом

$$u^*(t)=\sum_{j=1}^{N}c_j\varphi_j(t)=B(c_1,c_2,\dots,c_N), \tag{5}$$

где $\{\varphi_j(t)\},\ j=1,\dots,N$ – система базисных функций.

Методы дискретизации в первую очередь разделяются в зависимости от способа получения координат сигнала.

Наиболее широкое распространение получили методы дискретизации, при которых сигнал $u(t)$ заменяется совокупностью его мгновенных значений $u(t_j)$, взятых в определенные моменты времени $t_j,\ j=1,\dots,N$ и называемых выборками или отсчетами. Роль весовых функций в этом случае выполняет дельта-функция Дирака $\delta(t-t_j)=\begin{cases}\infty, & t=t_j,\\ 0, & t\neq t_j,\end{cases}\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_j)dt=1$. В соответствии с представлением текущего значения функции $u(t)$

$$u(t_j)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\delta(t-t_j)dt$$

можно сказать что координаты (c_1 ,c_2, …, c_N) представляют собой выборки $U(t_j)[\xi_j(t)=\delta(t-t_j)]$.

Т.к. дельта-функция технически нереализуема, то длительность каждой выборки конечна. Отсчеты берутся не в одной точке, а в некотором интервале времени, зависящем от длительности управляющего импульса ключевого устройства. Когда длительность импульса значительно меньше шага дискретизации, выборки представляют собой короткие импульсы, амплитуды которых пропорциональны мгновенным значениям сигнала.

Отрезок времени $\Delta t_j=t_j-t_{j-1}$ между соседними выборками называется шагом дискретизации. Если шаг постоянный, то дискретизация считается равномерной. Если шаг Δt_j непостоянный, то дискретизацию называют неравномерной.

Равномерная дискретизация по частотному критерию. Методы равномерной дискретизации получили наиболее широкое применение. Они характеризуются простым алгоритмом, исключающим необходимость фиксировать время отсчетов, что существенно облегчает техническую реализацию [2].

В вопросе определения величины шага при равномерной дискретизации известно несколько подходов, отличающихся, прежде всего тем, каким параметром характеризуются динамические свойства сигнала.

Наибольшее распространение получила модель сигнала в виде квазистационарного случайного процесса, каждая реализация которого представляет собой функцию с ограниченным спектром. Величина дискретизации в этом случае зависит от наивысшей частоты спектра. Такой критерий выбора отсчетов называется частотным.

Правило выбора шага дискретизации в этом случае в наиболее четкой форме сформулировал и доказал академик В.А. Котельников.

Теорема Котельникова устанавливает принципиальную возможность полного восстановления детерминированной функции с ограниченным спектром по ее отсчетам и указывает предельное значение, при котором такое восстановление возможно.

Теорема. Функция $U(t)$, допускающая преобразование Фурье и имеющая непрерывный спектр, ограниченный полосой частот от 0 до $F_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$, полностью определяется дискретным рядом своих мгновенных значений, отсчитанных через интервал времени $\Delta t = \frac{1}{2F_c} = \frac{\pi}{\omega_c}$.

Использование теоремы как точного утверждения по отношению к реальным сигналам, а также попытки организовать на ее основе технический способ дискретизации наталкиваются на ряд принципиальных трудностей.

1 . Реальный сигнал имеет конечную длительность и при представлении его в частотной области обладает неограниченным спектром. Однако в силу свойств реальных источников сигналов и ограниченности полосы пропускания реальных каналов спектр сигнала с той или иной степенью точности можно считать ограниченным некоторой предельной частотой. Обычно она определяется на основе энергетического критерия. Такие ограничения спектра, естественно, ведут к искажению сигнала.

2. Предполагаемая процедура восстановления сигнала вносит весьма существенную дополнительную погрешность. Она возникает потому, что невозможно обеспечить создание импульсов бесконечно малой длительности, как невозможно осуществить их передачу через реальную систему.

Критерий Котельникова, тем не менее, широко используется при преобразовании сигнала в цифровую форму.

Квантование сигналов. Пусть случайный процесс $U(t)$ является математической моделью непрерывного сигнала. Тогда мгновенные значения сигнала $U(t) = U(t_j)$ представляют собой случайную величину. Диапазон ее изменения, называемый непрерывной шкалой мгновенных значений, ограничен значениями $U_{\min}$ и $U_{\max}$, что отражает условие физической реализуемости сигнала. Непрерывную шкалу мгновенных значений $U_n = U_{\max} - U_{\min}$ можно разбить на n интервалов, называемых *шагами квантования*.

Из множества мгновенных значений, принадлежащих i–му шагу квантования ($U_{i-1} \le U \le U_i$), только одно значение является разрешенным. Любое другое из указанного множества значений округляется до U_i'. Совокупность величин U_i', $i = 1,\ldots,n$ образует дискретную шкалу уровней квантования. Если эта шкала равномерна, т. е. разность значений $\Delta U_i' = U_i' - U_{i-1}'$, постоянна на всем протяжении непрерывной шкалы мгновенных значений сигнала U, то квантование называют равномерным. Если постоянство не выполняется – квантование неравномерное. Благодаря простоте технической реализации равномерное квантование получило наиболее широкое распространение.

В результате замены мгновенного значения сигнала U соответствующим уровнем квантования U_i', возникает погрешность $\delta_i = U - U_i'$, которая называется ошибкой квантования.

Эта погрешность является случайной величиной. Нас интересует ее максимальное значение $\delta_m = \max\left|\delta_i\right|$ и среднеквадратическое отклонение σ для всего диапазона измерения мгновенных значений сигнала. Используются также приведенные значения этих величин

$$\delta_{Mo} = \frac{\delta_M}{U_n},\ \sigma_0 = \frac{\sigma}{U_n}.$$

Чтобы минимизировать наибольшую возможную ошибку квантования непрерывного сигнала его целесообразно разбить на n одинаковых шагов квантования $\Delta = \dfrac{U_{\max} - U_{\min}}{n}$ и уровни квантования разместить в середине каждого шага. При этом минимальная ошибка квантования не превышает $0{,}5\Delta$. Если каждый уровень квантования выбран равным нижней или верхней границе шага квантования, максимальная ошибка квантования возрастает до величины Δ.

Среднеквадратическое отклонение ошибки квантования для i–го шага σ_i зависит не только от шага Δ_i и расположения в нем i–го уровня квантования, но и от закона распределения мгновенных значений сигнала в пределах этого шага:

$$\sigma_i = \sqrt{\int_{U_{i-1}'}^{U_i'} \left(U - U_i'\right)^2 p(U)dU}\,, \tag{6}$$

где $p(U)$ –- функция плотности вероятности мгновенных значений сигнала U.

Считая шаги квантования малыми по сравнению с диапазоном изменения сигнала, плотность $p(U)$ в пределах каждого i–го шага можно принять постоянной и равной некоторому среднему значению $p(U_i')$. Тогда

$$\sigma_i = \sqrt{p(U_i')\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \delta_i^2 d\delta_i} = \sqrt{p(U_i')\frac{\Delta_i^3}{12}} \text{ или } \sigma^2 = [p(U_i')\Delta_i]\frac{\Delta_i^2}{12}. \qquad (7)$$

Минимальная среднеквадратическая ошибка σ_i достигается при расположении уровня квантования в середине шага. Дисперсия ошибки квантования на i–ом шаге равна $\frac{\Delta_i^2}{12}$, помноженной на вероятность $p(U_i')\Delta_i$ попадания мгновенного значения сигнала в пределы данного шага. Дисперсия при σ^2 для всей непрерывной шкалы мгновенных значений сигнала определяется как математическое ожидание дисперсии на отдельных шагах квантования

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} p(U_i')\Delta_i^3. \qquad (8)$$

При одинаковых шагах квантования $\Delta_i = \Delta$ и окончательно получим

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12}\sum_{i=1}^{n} p(U_i')\Delta. \qquad (9)$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} p(U_i')\Delta = 1$, то $\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12}$.

Таким образом, при квантовании с постоянным шагом и размещении уровней квантования в середине шага среднеквадратическая ошибка квантования

$$\sigma^2 = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}} \qquad (10)$$

Число уровней квантования при заданной допустимой среднеквадратической ошибке квантования и отсутствии помех можно найти из соотношения $n = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{\sigma 2\sqrt{3}}$ [3].

Восстановление сигнала и критерии качества восстановления.

Воспроизведение сигнала по выборкам можно производить на основе как ортогональных, так и неортогональных базисных функций, которые определяют тип аппроксимирующего многочлена и принцип приближения: интерполяционный, экстраполяционный, комбинированный.

При неортогональных представлениях сигнала наиболее часто используются степенные алгебраические многочлены вида

$$U^{*}(t)=\sum_{j=0}^{N}a_{j}t^{j} \text{ или } U^{*}(t)=\sum_{j=0}^{N}a_{j}(t-t_{0})^{j} . \qquad (11)$$

где a_j – действительные коэффициенты.

Если базисные функции выбраны так, что значения аппроксимирующего полинома совпадают со значениями выборок в моменты их отсчета, то такой многочлен называют интерполирующим. Для их реализации необходима задержка на интервал интерполяции для выполнения значений отсчетов

Если такая задержка недопустима, то используют экстраполяционные методы, не требующие задержки сигнала при определении значений выборок.

При замене функции $U(t)$ совокупностью отсчетов основная задача заключается в том, чтобы на интервале преобразования взять их не более чем требуется для восстановления исходного сигнала с заданной точностью в соответствии с выбранным критерием качества приближения.

В зависимости от целевого назначения получаемой информации используются различные критерии точности приближения $U(t)$ и $U^{*}(t)$.

1 В соответствии с критерием равномерного воспроизведения, называемым также критерием наибольшего отклонения, устанавливается абсолютное значение допустимой погрешности:

$$\delta_{g}\geq\delta_{m}=\max_{t\in\Delta_{i}}\left|\delta_{u}(t)\right|,$$

где δ_m – максимальная погрешность приближения; Δ_i – участок аппроксимации; $\delta_{u}=u(t)-u^{*}(t)$ – текущая погрешность приближения.

2. Если сигнал задан множеством возможных реализаций, то наибольшая допустимая погрешность Δm устанавливается для всей совокупности реализаций $u(t)$ и $u^{*}(t)$:

$$\Delta m=\sup\{\left|\delta_{m}\right|\}.$$

3. Широко используется критерий среднеквадратического приближения:

$$\sigma_{g}\geq\sigma=\sqrt{\frac{1}{\Delta i}\int_{\Delta i}\delta_{n}^{2}(t)dt},$$

где σ_g – допустимая среднеквадратическая погрешность приближения.

В технической реализации неравномерная дискретизация на основе критерия среднеквадратического приближения сложнее, чем на базе критерия равномерного приближения (случай 1).

4. Интегральный критерий приближения определяется соотношением

$$\varepsilon_g \geq \varepsilon = \frac{1}{\Delta i}\int_{\Delta i} \delta_n^2(t)dt,$$

где ε_g – допустимая средняя погрешность приближения; ε – средняя погрешность приближения.

5. Применяется также вероятностный критерий, в соответствии с которым задается допустимый уровень P_g величины p – вероятности того, что текущая погрешность приближения $\delta(t)$ не превышает некоторого определенного значения δ_0:

$$P_g \leq P\left\{\delta(t) \leq \delta_0\right\} \text{ [3].}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. М.: Высшая школа, 1989.

2. Величкин А.И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. М.: Сов. радио, 1970.

3. Коган И.М. Прикладная теория информации. М.: Радио и связь, 1981.

Ташатов Нұрлан Наркенұлы

Сигнадарды қайта қалпына келтіру және дискретизациялау

Ұсынылған мақалада толассыз сигналдарды қайта қалпына келтіру және дискетизациялауға байланысты мәселер қарастырылады: дискретизациялаудың негізгі тапсырмалары, жеке шарттар бойынша біркелкі дискретизациялау, сигналдарды кванттау, сонымен қатар толассыз сигналдарды қайта қалпына келтіру және сигналдарды қайта калпына келтірудің сапа критериялары.

Tashatov Nurlan Narkenovich

This article considers problems of the sampling and reconstruction processes of the continuous signals: the sampling problem statement, the steady sampling by the frequency criterion, the quantization of signals, and also the reconstruction of the continuous signal and the quality criteria for recovery of signals.