ӘОЖ 519.6

ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ТЕҢДЕУДІ ДИСКРЕТИЗАЦИЯЛАУДА ЖЫЛДАМ ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІН ҚОЛДАНУ

Арыстанғаликқызы Ақмарал
arystangalikyzy_a@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ «6М060100-математика» мамандығының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан,Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Н.Темірғалиев

Жуықтау есебінің әртүрлі қойылымдардаберіледі және олардың барлығы келесі анықтамаға негізделген [1]:

$$\delta_N\left(D_N;F\right)_Y=\min_{N_1+\cdots+N_m=N}\ \inf_{\left(l^{(N_1,\ldots,N_m)},\varphi_N\right)\in D_{N_1,\ldots,N_m}}\delta\left(\left(l^{(N_1,\ldots,N_m)},\varphi_N\right);F\right)_Y,$$

мұндағы

$$\delta_N\left(\left(l^{(N_1,\ldots,N_m)},\varphi_N\right);F\right)_Y=\sup_{f=(f_1,\ldots,f_m)\in F}\left\|Tf-\varphi_N\left(l_1^{(1)}(f_1),\ldots,l_1^{(N_1)}(f_1),\ldots,l_m^{(1)}(f_m),\ldots,l_m^{(N_m)}(f_m);t,x\right)\right\|_Y,$$

X, Y - сәйкесінше Ω_X және Ω_Y жиынында анықталған сандық функциялардардан құралған нормаланған кеңістіктер, $F=F_1\times\cdots\times F_m\subset X-$функциялар класы, $T:X\to Y$ жуықталатын оператор, $l^{(N_1,\ldots,N_m)}=\left(l_1^{(1)},\ldots,l_1^{(N_1)};\ldots;l_m^{(1)},\ldots,l_m^{(N_m)}\right)$: $l_k^{(j_k)}:F_k\to C,\left(j_k=1,2,\ldots,N_k,k=1,2,\ldots,m\right)$ функционалдар, $\varphi_N:C^N\times\Omega_Y\to C$ $\left(N=N_1+\cdots+N_m\right)$ жиынында анықталған функция, $D_{N_1,\ldots,N_m}\subset\{(l^{(N_1,\ldots,N_m)},\varphi_{N_1,\ldots,N_m})\}$, $D_N=\bigcup_{\substack{N_1,\ldots,N_m:\\ N_1+\cdots+N_m=N}}D_{N_1,\ldots,N_m}$.

Жұмыстың мақсаты дербес туындылы теңдеудің шешімін дискретизациялаудағы тиімді жуықтау агрегаттарының есептеу қиындығын азайту.

[2-4] жұмыстарында Tf ретінде $u(t,x;f_1,f_2)$ -

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\left(t,x\right)=-\left(-L\right)^p u\left(t,x\right),\ t>0,x\in[0,1]^s, \tag{1}$$

$$u\left(0,x\right)=f_1\left(x\right)\in F_1,\frac{\partial}{\partial t}u\left(t,x\right)\Big|_{t=0}=f_2\left(x\right)\in F_2,x\in[0,1]^s, \tag{2}$$

есебінің шешімін бастапқы шарттарының нүктелердегі мәндері бойынша (1)-(2)есебінің шешімін дискретизациялау есебі қарастырылады, мұндағы p -оң бүтін сан,

$L=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$ коэффициенттері $A=\left(a_{ij}\right)$ болатын оң анықталған екінші ретті дифференциалдық оператор,

$$D_N=\bigcup_{N_1+N_2=N}\left\{\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right):l_k^{(j_k)}\left(f_k\right)=f_k\left(\xi_{j_k}^{(k)}\right),\,j_k=1,2,...,N_k,\,k=1,2\right\}\equiv P_N\times\left\{\varphi_N\right\}.$$

Егер (2)бастапқы шарттары $f_k\left(x\right)=\sum_{m\in Z^s}\hat{f}_k(m)e^{2\pi i(m,x)}\,\left(k=1,2\right)$ абсолютті жинақталатын Фурье қатары түрінде жазылса, онда (1) теңдеуінің $[0,+\infty)\times[0,1]^S$ жиынында $u(t,x)$ шешімі

$$u\left(t,x\right)=\sum_{m\in Z^s}\rho_m\left(t\right)\hat{f}\left(m\right)e^{2\pi i(m,x)}$$

түрінде жазылады, бұл жерде $\left(\left[m,m\right]=mAm^T\right)$

$$\rho_m\left(t\right)=\left(\rho_m^{(1)}\left(t\right),\rho_m^{(2)}\left(t\right)\right)=\begin{cases}\left(\cos\left(\left(2\pi\sqrt{[m,m]}\right)^p t\right),\dfrac{\sin\left(\left(2\pi\sqrt{[m,m]}\right)^p t\right)}{\left(2\pi\sqrt{[m,m]}\right)^p}\right),\text{егер}\, m\neq 0\\ \left(1,t\right),\text{егер}\, m=0\end{cases},$$

$$\hat{f}\left(m\right)=\left(\hat{f}_1\left(m\right),\hat{f}_2\left(m\right)\right)^T.$$

ал тиімді жуықтауагрегаты

$$\bar{\varphi}_N\left(f_1\left(\xi_1^{(1)}\right),\dots f_1\left(\xi_{N_1}^{(1)}\right);f_2\left(\xi_1^{(1)}\right),\dots f_1\left(\xi_{N_2}^{(1)}\right),t,x\right)=$$

$$\bar{\varphi}_{N_1}^{(1)}\left(f_1\left(\xi_1^{(1)}\right),\dots,f_1\left(\xi_{N_1}^{(1)}\right);t,x\right)+\bar{\varphi}_{N_2}^{(2)}\left(f_1\left(\xi_1^{(2)}\right),\dots,f_1\left(\xi_{N_2}^{(2)}\right);t,x\right),$$

$F_1=F_2=B_{q,\theta}^r\left(0,1\right)^s$ немесе $W_q^r\left(0,1\right)^s$ болғанда

$$\bar{\varphi}_{N_j}^{(j)}\left(f_j\left(\xi_1^{(j)}\right),\dots,f_j\left(\xi_{N_j}^{(j)}\right);t,x\right)=\frac{1}{N_j^s}\sum_{k_1=0}^{N_j-1}\cdots\sum_{k_s=0}^{N_j-1}f_j\left(\xi_{k_1,\dots,k_s}^{(j)}\right)\rho_m^{(j)}\left(t\right)e^{2\pi i\left(m,x-\xi_{k_1,\dots,k_s}^{(j)}\right)},$$

$$\xi_{k_1,\dots,k_s}^{(j)}=\left(\frac{k_1}{N_j},\dots,\frac{k_s}{N_j}\right),\ k_l=0,1,\dots,N_j-1,l=1,\dots,s;\,j=1,2,$$

ал, $E_s^r,SW_p^r\left(0,1\right)^s$ болғанда

$$\bar{\varphi}_{N_j}^{(j)}\left(f_j\left(\eta_1^{(j)}\right),\dots,f_j\left(\eta_{N_j}^{(j)}\right);t,x\right)=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j\geq 0,\,\|\tau\|<n_j}}\frac{1}{\det A_{n_j,\tau}}\sum_{k\in Z^s/A_{n_j,\tau}}f_j(\eta_{k,n_j}^{(j)})\sum_{2^{\tau_j-1}\leq|m_j|<2^{\tau_j}}\rho_m^{(j)}\left(t\right)e^{2\pi i(m,x-\eta_{k,n_j}^{(j)})},$$

мұндағы $\left(\|\tau\|=\tau_1+\dots+\tau_s\right)$

$$A_{n_j,\tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{n_j-\|\tau\|} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(n_j-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(n_j-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(n_j-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \dots & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix}, \ \eta_{k,n_j}^{(j)} = k(A_{n_j,\tau}^{-1})' \ k \in Z^s / A'_{n_j,\tau}, \ j = 1,2 \quad (3)$$

түрінде жазылады(p_l - жай сан, $2^{l+3} \le l^2 p_l < 2^{l+4}$, $a_1^{(l)} = 1$, $a_2^{(l)},...,a_s^{(l)}$ - p_l модулі бойынша оптималды коэффициенттер [4]).

d - $s \times s$ бүтінсанды матрицасы берілсін.

Анықтама 1. $Z^s d = \{k \cdot d : k \in Z^s\}$ *векторлар жиыны* d *матрицасы арқылы туындалған бүтін санды тор (решетка) деп, ал* d *матрицасының жолдары осы тордың базисі деп аталады. Егер* $m, n \in Z^s$ *векторлары үшін* $m - n \in Z^s d$, $(a-b) \in a$ (a-b) ∈ a *болса, онда олар* $Z^s d$ *торы бойынша салыстырымды деп аталады да* $m \equiv n(\mathrm{mod}\, d)$*арқылы белгіленеді.*

Осылай анықталған салыстырымдылық қатынасы эквивалентті қатынас болғандықтан, барлық Z^s жиынын өзара салыстырымды векторлардан құрылған кластарға жіктеуге болады. Осы кластардан тұратын Z^s / d *факторжиыны* d модулі бойынша қалындылар класы деп аталады. d матрицасы өзгеше болмағанда (яғни $\det d \ne 0$ болғанда) Z^s / d жиынының элементтері $N_d = |\det d|$ болатыны белгілі.

Мақалада $n \in Z^s / d$ жазуын $Z^s d$ торы бойынша салыстырымды векторлар теңестіріледі де, n әрбір кластан тек бір «өкілден» алынады деп түсініледі. Мұндай барлық мүмкін болатын векторлардың саны d модулі бойынша қалындылар кластар санына, яғни N_d -ға тең болады.

Ерекше емес бүтін санды $s \times s$ өлшемді d матрицасы берілсін және N_d нүктелі $\{f_k\}_{k \in Z^s/d'}$ ақырлы сандық тізбегі берілсін, мұндағы « ' » - транспонирлеу белгісі.

Анықтама 2.*Дискретті «алгебралық» Фурье түрлендіруі (Д«а»ФТ) деп*

$$\hat{f}_m = \frac{1}{N_d} \sum_{k \in Z^s/d'} f_k W_d^{m.k}, \ \textit{мұндағы}\, W_d^{m.k} = e^{-2\pi i (m, k(d')^{-1})} \left(m \in Z^s / d\right) \quad (4)$$

түрлендіруі аталады.

Дискретті «алгебралық» Фурье түрлендіруі алгебралық сандар теориясы негізінде [5] жұмысында анықталып, оның әртүрлі нақтылаулары берілді. Аталған жұмыста d матрицасының кейбір нақтылаулары әртүрлі оптималдау есептері, соның ішінде, N_d жай сан болғанда квази Монте-Карло әдістерімен байланыстылығы көрсетілді.

Лемма 1. d *бүтінсанды матрицасы* d_1 *және* d_2 *бүтінсанды матрицаларының көбейтіндісі түрінде жазылсын. Онда кез келген* $k \in Z^s / d'$ *векторын жалғыз* $k = l + z d'_1$, $l \in Z^s / d'_1$, $z \in Z^s / d_2$ *түрінде жазуға болады.*

Лемма 2. *$\bar{\varphi}_{N_j}^{(j)}$ жуықтау агрегаттарының $\eta_k=\eta_k^{(j)}$, $k\in Z^s\big/A'_{n,\tau}$, $n=n_j$ түйіндерін*

$$\bigcup_{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_s)\in Z^s:\tau_j\ge 0,\\ \|\tau\|:=\tau_1+\dots+\tau_s\le n}}\left\{\left(\frac{l}{2^{\tau_1+1}p_{n-\|\tau\|}}+\frac{z_1}{2^{\tau_1+1}},\frac{a_2^{(n-\|\tau\|)}l}{2^{\tau_2+1}p_{n-\|\tau\|}}+\frac{z_2}{2^{\tau_2+1}},\dots,\frac{a_s^{(n-\|\tau\|)}l}{2^{\tau_s+1}p_{n-\|\tau\|}}+\frac{z_s}{2^{\tau_s+1}}\right):\begin{matrix}k_j=0,1,\dots,2^{\tau_j+1}-1;\ j=1,\dots,s,\\ k=0,\dots,p_{n-\|\tau\|}-1.\end{matrix}\right\}$$

түрінде жазуға болады.

Дәлелдеу схемасы. $A_{n,\tau}$ матрицасын

$$d_{\tau,n}^{(1)}=\begin{pmatrix}p_{n-\|\tau\|} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2^{(n-\|\tau\|)} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_3^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_s^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\text{ және } d_{\tau,n}^{(2)}=diag\left[2^{\tau_1+1},2^{\tau_2+1},\dots,2^{\tau_s+1}\right]$$

матрицаларының көбейтіндісі түрінде жазып, $k\in Z^s\big/A'_{n,\tau}$ үшін 1-лемманы пайдаланып

$$\left\{k(A_{n,\tau}^{-1})'\right\}_{k\in Z^s/A'_{n,\tau}}=\left\{\left(\frac{l}{2^{\tau_1+1}p_{n-\|\tau\|}}+\frac{z_1}{2^{\tau_1+1}},\frac{a_2^{(n-\|\tau\|)}l}{2^{\tau_2+1}p_{n-\|\tau\|}}+\frac{z_2}{2^{\tau_2+1}},\dots,\frac{a_s^{(n-\|\tau\|)}l}{2^{\tau_s+1}p_{n-\|\tau\|}}+\frac{z_s}{2^{\tau_s+1}}\right):\begin{matrix}l=0,1,\dots,p_{n-\|\tau\|},\\ 0\le z_j<2^{\tau_j+1},\ j=\overline{1,s}\end{matrix}\right\}.$$

теңдігі алынады. □

2-леммадан $\tilde{\varphi}_{N_j}^{(j)}$ жуықтау агрегаттарының түйіндерінкомпьютерде кері матрицаларды есептемей-ақ тиімді есептеуге болатындығын көреміз.

$k\in Z^s\big/A'_{n,\tau}$, $m\in Z^s\big/A_{n,\tau}$ үшін $f_{jk}=f_j(\eta_k^{(j)})$, $W_{A_{n,\tau}}^{m.k}=e^{-2\pi i\left(m,k\left(A'_{n,\tau}\right)^{-1}\right)}$ деп алып $\tilde{\varphi}_{N_j}^{(j)}$ жуықтау агрегатын

$$\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j\ge 0,\ \|\tau\|<n}}\left(\sum_{2^{\tau_j-1}\le|m_j|<2^{\tau_j}}\rho_m^{(j)}(t)e^{2\pi i(m,x)}\hat{f}_m\right),\quad \hat{f}_m=\frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k\in Z^s/A_{n,\tau}}f_{jk}W_{A_{n,\tau}}^{m.k}$$

түрде жазуға болады. $\tilde{\varphi}_{N_j}^{(j)}$ есептеу агрегатыносы түрде есептеу үшін $\succ\!\prec\dfrac{N^2}{\ln N}$ комплекс сандарды көбейту амалдарын қолдану қажет. Алайда, жылдам Фурье түрлендіруі арқылы бұл амалдар санын $\succ\!\prec N\ln N$-ге дейін түсіруге болады. Бұл келесі теоремадан шығады:

Теорема. *$R^s\big/A_{n,\tau}\ni m=m^{(1)}+m^{(2)}d_{\tau,n}^{(2)}$ ($m^{(1)}\in Z^s\big/d_{\tau,n}^{(2)}$, $m^{(2)}\in Z^s\big/d_{\tau,n}^{(1)}$)үшін*

$$\hat{f}_m=\frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k\in Z^s/A'_{n,\tau}}f_kW_{A_{n,\tau}}^{m.k}=\frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k_1\in Z^s/d_{\tau,n}^{(1)}}A_{k_1}^{m^{(1)}}\cdot W_{d_{\tau,n}^{(1)}}^{m^{(2)}.k_1},$$

$$A_{k_1}^{m^{(1)}}=W_{d_{\tau,n}^{(1)}d_{\tau,n}^{(2)}}^{m^{(1)}.k_1}\sum_{k_2\in Z^s/d_{\tau,n}^{(2)}}f_{k_1+k_2d_{\tau,n}^{(1)}}W_{d_{\tau,n}^{(2)}}^{m^{(1)}.k_2}.$$

Дәлелдеу схемасы. Бұл

$$W^{m^{(1)}+m^{(2)}d^{(2)}_{\tau,n}.k_1+k_2d'^{(1)}_{\tau,n}}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}=W^{m^{(1)}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}\cdot W^{m^{(1)}.k_2d'^{(1)}_{\tau,n}}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}\cdot W^{m^{(2)}d^{(2)}_{\tau,n}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}\cdot W^{m^{(2)}d^{(2)}_{\tau,n}.k_2d'^{(1)}_{\tau,n}}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}=W^{m^{(1)}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}\cdot W^{m^{(1)}.k_2}_{d^{(2)}_{\tau,n}}\cdot W^{m^{(2)}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}}$$

теңдіктерінен шығады:

$$\left(\det A_{n,\tau}\right)\cdot\hat{f}_m=\left(\det A_{n,\tau}\right)\cdot\hat{f}_{m^{(1)}+m^{(2)}d^{(2)}_{\tau,n}}=\sum_{k\in Z^s/A'_{n,\tau}}f_kW^{m^{(1)}+m^{(2)}d^{(2)}_{\tau,n}.k}_{A_{n,\tau}}=\sum_{k_1\in Z^s/d'^{(1)}_{\tau,n}}\sum_{k_2\in Z^s/d'^{(2)}_{\tau,n}}f_{k_1+k_2d'^{(1)}_{\tau,n}}\cdot$$

$$\cdot W^{m^{(1)}+m^{(2)}d^{(2)}_{\tau,n}.k_1+k_2d'^{(1)}_{\tau,n}}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}=\sum_{k_1\in Z^s/d^{(1)}_{\tau,n}}W^{m^{(2)}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}}\cdot W^{m^{(1)}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}\sum_{k_2\in Z^s/d^{(2)}_{\tau,n}}f_{k_1+k_2d^{(1)}_{\tau,n}}W^{m^{(1)}.k_2}_{d^{(2)}_{\tau,n}}=\sum_{k_1\in Z^s/d^{(1)}_{\tau,n}}A^{m^{(1)}}_{k_1}\cdot W^{m^{(2)}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}}.\ \square$$

$\tilde{\varphi}^{(j)}_{N_j}$ жуықтау агрегаты үшін $2^{\tau_j-1}\le\left|m^{(2)}_j\right|<2^{\tau_j}\left(j=1,2,...,s\right)$ болғандықтан $m=m^{(1)}+m^{(2)}d^{(2)}_{\tau,n}$ ($m^{(1)}\in Z^s/d^{(2)}_{\tau,n}$, $m^{(2)}\in Z^s/d^{(1)}_{\tau,n}$) түрінде жазылғанда $m^{(2)}=0$ болады. Демек $\hat{f}_m=\frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k_1\in Z^s/d^{(1)}_{\tau,n}}A^m_{k_1}$, $2^{\tau_j-1}\le\left|m^{(2)}_j\right|<2^{\tau_j}\left(j=1,2,...,s\right)$.

$$A^{m^{(1)}}_{k_1}=W^{m^{(1)}.k_1}_{d^{(1)}_{\tau,n}d^{(2)}_{\tau,n}}\sum_{k_2\in Z^s/d^{(2)}_{\tau,n}}f_{k_1+k_2d^{(1)}_{\tau,n}}W^{m^{(1)}.k_2}_{d^{(2)}_{\tau,n}}$$

$k_1\in Z^s/d'^{(1)}_{\tau,n}$ және $m^{(1)}\in Z^s/d^{(2)}_{\tau,n}$ үшін $A^{m^{(1)}}_{k_1}$ санын есептеуге $\succ\prec\det d^{(2)}_{\tau,n}=2^{|\tau|+s}$ көбейту амалын, демек $k_1\in Z^s/d'^{(1)}_{\tau,n}$ бекітілгенде барлық $m^{(1)}\in Z^s/d^{(2)}_{\tau,n}$ сандарын есептеу үшін $\succ\prec\left(\det d^{(2)}_{\tau,n}\right)^2=2^{2|\tau|+2s}$ көбейту амалынорындауқажет. Алайда $A^{m^{(1)}}_{k_1}$ - $2^{|\tau|+s}$ санды дискретті Фурье түрлендіруі болғандықтан, оған жылдам Фурье түрлендіру алгоритмін қолдану арқылы осы санды $\left(\det d^{(2)}_{\tau,n}\right)\ln\left(\det d^{(2)}_{\tau,n}\right)\succ\prec 2^{|\tau|+s}|\tau|$ санына дейін азайтуға болады. Демек, барлық $A^m_{k_1}$ ($k_1\in Z^s/d'^{(1)}_{\tau,n}$) сандарын, сонымен бірге $\hat{f}_m$ коэффициенттерін есептеу үшін $\succ\prec\left|\det d^{(1)}_{\tau,n}\right|\cdot 2^{|\tau|+s}|\tau|=p_{n-|\tau|}\cdot 2^{|\tau|+s}|\tau|\succ\prec\frac{2^n|\tau|}{\left(n-|\tau|\right)^2}$ көбейту амалынорындауқажет.

Бұдан $N=N_j$ нүктелі $\tilde{\varphi}^{(j)}_{N_j}$ агрегатын есептеу үшін

$$\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j\ge0,\ \|\tau\|<n}}\left(\frac{2^n|\tau|}{\left(n-|\tau|\right)^2}+2^{|\tau|}\right)=2^n\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j\ge0,\ \|\tau\|<n}}\frac{|\tau|}{\left(n-|\tau|\right)^2}+\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j\ge0,\ \|\tau\|<n}}2^{|\tau|}\succ\prec 2^nn^s\succ\prec N\left(\log N\right)^2$$

көбейту амалдары жұмсалатынын көруге болады, ал бұл бастапқы көрсетілгеннен $\succ\prec N\left(\ln N\right)^{-3}$ есе аз.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Н. Темиргалиев, К. Е. Шерниязов және М. Е. Берикханова, Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье //*Совр. пробл. матем.,* N17.-2013,P.179– 207.
2. L. K. HuaandY. Wang, Onuniformdistributionandnumericalanalysis //*Sci. Sinica,* vol.16.-1975, P. 184-198.
3. Ш. К. Абикенова, А. Утесов және Н. Т. Темиргалиев, О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева//*Матем.заметки,* том 91.-1.-N3.- 2012, P. 459–463.
4. Е. И. Шангиреев, О восстановлении решений волнового уравнения. //Дисс.. кандидата физико-математический наук: 01.01.01- математический анализ, Караганда, 2003.

5. Ж. Н. Темиргалиева жəне Н. Темиргалиев, Быстрые “алгебраические” преобразования Фурье на равномерно распределенных сетках//*Изв. вузов. Матем.,* 1.-N 5, 2016 P. 93–98.