

УДК 517.5

КРИТЕРИЙ КВАЗИСЛАБОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Мукеева Жазира Меркасимовна

zhazira.mukeyeva@bk.ru

докторант 1-курса

специальности «математика»

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – Нурсултанов Е.Д.

В работе [1], [2] был получен критерий квази слабой ограниченности интегрального оператора в пространствах Лоренца. В данной работе исследовано ограниченность интегральных операторов в анизотропных пространствах Лоренца.

В этой работе мы изучаем квазислабый (p, q) -ограниченность следующего интегрального оператора

$$(Af)(x_1, x_2) = \int \int_{R^2} K(x_1, x_2, y_1, y_2) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

Определение 1 Будем говорить, что оператор A есть (p, q) -сильный тип, если он ограниченно действует из $L_p(R^2, \nu)$ в $L_q(R^2, \nu)$.

Определение 2 Будем говорить, что оператор A есть (p, q) -слабый тип, если он ограниченно действует из $L_p(R^2, \nu)$ в $L_{q\infty}(R^2, \nu)$.

Определение 3 Оператор A ограниченно действующий из $L_{p_1}(R^2, \nu)$ в $L_{q\infty}(R^2, \nu)$ назовем оператором (p, q) -квазислабого типа. Пусть $p = (p_1, p_2)$ и $q = (q_1, q_2)$ $0 < p, q < \infty$.

В работе [1], [2] был получен критерий слабой и квазислабой ограниченности интегрального оператора в классических пространствах Лоренца. В частности доказано теорема.

Теорема А Пусть $1 < p, q \leq \infty, M_1 = \{e \subset \Omega: 0 < \mu(e) < \infty\}$, и $M_2 = \{w \subset D: 0 < \nu(w) < \infty\}$. Для того чтобы оператор A был квазислабого типа необходимо и достаточно

$$\sup_{e \in M_1, w \in M_2} \frac{1}{(\mu(e))^{1/q'}(\nu(w))^{1/p}} \left| \int_e \int_w K(x, y) d\mu dv \right| < \infty.$$

Мы будем рассматривать анизотропные пространства Лоренца.

Пусть $p = (p_1, p_2)$ и $q = (q_1, q_2) 0 < p, q < \infty$

Через $L_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца [3] с нормой

$$\|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_0^\infty \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_{1*2}}(t_1, t_2) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right)^{q_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}, q \leq \infty$$

Здесь при $q = \infty$ интеграл $(\int_0^\infty (F(t))^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$ понимается как $\sup_{t>0} F(t)$

Пусть $G \subset R$ - измеримое множество. Через $e_2(G)$ и $e_1(G, x_2)$ обозначим:

$$e_2(G) = \{x_2 \in R, x_2: R \times \{x_2\} \cap G \neq \emptyset\}$$

Для любого $x_2 \in e_2(G)$ определим

$$e_1(G, x_2) = \{x_1 \in R, x_1: (x_1, x_2) \in G\}$$

Пусть $t_1 > 0, t_2 > 0$

$$M_{t_1 t_2} = \{G: |e_2(G)| = t_2, |e_1(G, x_2)| = t_1, \forall x_2 \in e_2(G)\}$$

Определим

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds.$$

Мы будем использовать для f^{**} представление

$$f^{**}(t) = \sup_{|E|=t} \frac{1}{|E|} \int_E |f(x)| dx.$$

Лемма 1 Пусть f локально интегрируемая функция, тогда имеет место неравенство:

$$\int_0^t f^*(s) ds \leq 6 \sup_{|e|=\frac{t}{3}} \left| \int_e f(x) dx \right|$$

Лемма 2 Пусть f локально интегрируемая функция, тогда имеет место неравенство:

$$\bar{f}(t_1, t_2, M_0) \leq f^{*1*2}(t_1, t_2) \leq 72\bar{f}\left(\frac{t_1}{3}, \frac{t_2}{3}, M_0\right)$$

Теорема Пусть $1 < p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2) < \infty$. Для того чтобы интегральный оператор

$$(Af)(x_1, x_2) = \int \int_{R_2} K(x_1, x_2, y_1, y_2) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

был ограничен из $L_{p,1}(\mathbb{R}^2)$ в $L_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)$ необходимо и достаточно чтобы

$$\sup_{t_i > 0, S_i > 0} \sup_{G \in M_{t_1 t_2}, F \in M_{S_1 S_2}} \frac{1}{t_1^{\frac{1}{q'_1}} t_2^{\frac{1}{q'_2}} S_1^{\frac{1}{p_1}} S_2^{\frac{1}{p_2}}} \left| \int_G \int_F K(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \right| < \infty$$

Список использованных источников

1. Нурсултанов Е.Д. Костюченко А.Г. Об интегральных операторах в L_p -пространствах // Фунд. прикл. мат., Т. 5, №2.-1999, С.475-491.
2. Nursultanov E.D. Tikhonov S. Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal., Vol. 21, №3.-2011, С.950-981.
3. Nursultanov E.D. On the coefficients of multiple Fourier series in L_p -spaces // Izv. Math/, Vol. 64, №1.-2000, С.93-120.