

УДК 004.94

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ЗОНДИРОВАНИЯ РЕЛЬЕФА ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Ракишева Д. С.

dilya784@mail.ru

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Республика
Казахстан

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор **Муканова Б.Г.**

Аннотация. В данной статье показан метод решения интегрального уравнения для расчета электрического поля в среде на основе прямого и обратного косинус - преобразования Фурье. Проведен тест как влияет положение питающего электрода на кривые кажущихся сопротивлений.

Ключевые слова. Метод интегральных уравнений, преобразование Фурье, квазитрехмерная задача, электрическое зондирование, кривые кажущихся сопротивлений, рельеф дневной поверхности

Введение. Метод зондирования постоянным током [1]-[2] остается актуальным, так как обеспечивают большую глубинность и математические методы интерпретации результатов разработаны [3]-[12]. Автоматизация процесса измерений - это возможность проводить измерения с большой плотностью [13]-[14].

В работах [15-17], связанных с применением метода интегральных уравнений к моделированию задач электрического зондирования случаи рельефной формы дневной поверхности Земли не рассмотрены, либо не доведены до систематического численного

моделирования. Существующие методики поправок на рельеф имеют приближенный характер.

В реализации метода интегральных уравнений наличие рельефа существенно усложняет формулировку задачи по сравнению с плоским случаем. Это связано с тем, что для плоской границы раздела Земля-воздух можно применить метод отражений, что позволяет получить относительно простой вид интегрального уравнения, либо системы интегральных уравнений. В случае рельефной внешней границы зондируемой среды и сложных внутренних границ, результирующая математическая модель должна быть выведена в виде системы интегральных уравнений. Отметим, что в наших [18]-[20] трудах рассматриваются примеры численного решения задачи зондирования при помощи МИУ, в частности для случая системы хотя бы из двух интегральных уравнений.

Применение прямого и обратного косинус-преобразования Фурье для численного решения интегрального уравнения, возникающего в задаче зондирования среды с рельефом дневной поверхности, является новым результатом данной работы.

Примененный здесь алгоритм решения квазитрехмерной задачи методом преобразования Фурье был впервые разработан в 1987 году в [20]. Более детально идея метода описана также в монографии [19]. На основе этого алгоритма были созданы такие программы как IE2DR1 и PRIZT, широко используемые в геофизической практике. Однако, в этих программах не предусмотрена возможности моделирования сред с рельефом дневной поверхности. Это связано с тем, что в основе решаемых интегральных уравнений в [19] лежит метод отражений, работающий для плоской поверхности среды. Основываясь на идее этого метода, в данной работе, мы смоделировали электрическое поле для задачи электрической томографии надпроводящей средой с рельефом дневной поверхности.

Постановка задачи. Дан однородный рельеф. Для этого случая выпишем интегральное уравнение для плотности вторичных зарядов $q_0(M)$, моделируемых при помощи простого слоя [19]:

$$q_0(M) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n^0} \left(\frac{1}{|AM|} \right) - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma^0} q_0(P) \frac{\partial}{\partial n_M^0} \left(\frac{1}{|PM|} \right) d\Gamma_p^0 \quad (1)$$

Искомое электрическое поле является трехмерным. Однако, интегральное уравнение (1) позволяет свести задачу к двумерной. Далее, решение задачи в такой среде можно получить, непосредственно решая уравнение (1), как это сделано, например, в [18]-[19]. Однако, метод преобразования Фурье позволяет еще более уменьшить размерность уравнения (1) до единицы. Это дает возможность сократить на порядок время вычислений электрического поля точечного источника в двумерных средах.

Применим этот метод к интегральному уравнению для однородного рельефа (1).

Питающий электрод расположен в точке $A(x_A, y_A, z_A)$ – это электрод, возбуждающий постоянным исследуемую среду. В методе интегральных уравнений электрическое поле моделируется суммой первичного поля питающего электрода в однородном полупространстве и поля вторичных источников, расположенных на поверхности рельефа.

Предположим, что точка M имеет координаты $M(x, y, z)$, а координаты точки $P(x', y', z')$. Функция Грина $G(P, M) = \left(\frac{1}{|PM|} \right)$ зависит от следующих аргументов (x, x', y, y', z, z') . В уравнении (1) данная функция дифференцируется по направлению нормали в точке $M(x, y, z)$. Для двумерного рельефа, вытянутого вдоль оси y , направление нормали зависит только от координат x и z точки $M(x, y, z)$. Это значит данная функция зависит от координат $\{x, x', y - y', z, z'\}$.

Можно отметить, что интегрирование по поверхности Γ^0 можно представить как последовательное интегрирование по образующей, направленной вдоль y оси, а затем по контуру L .

Таким образом, формулу (1) можно записать в виде:

$$q_0(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, y - y_A, z, z_A) - \frac{1}{2\pi} \int_L \int_{-\infty}^{+\infty} q_0(x', y', z') \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', y - y', z, z') dy' dL \quad (2)$$

Внутренний интеграл в уравнении (2) есть интеграл свертки функций $q_0(x', y', z')$ и $\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', y - y', z, z')$ по координате y [17].

Теперь перейдем в спектральную область. Так как функции $q_0(x, y, z)$, $q_0(x', y', z')$, $\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', y - y', z, z')$ и $\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, y - y_A, z, z_A)$ являются четными функциями относительно переменной y , применим прямое косинус-преобразование Фурье [18]-[21]. Итак:

$$\tilde{q}_0(x', k_y, z') = 2 \int_0^\infty q_0(x', y', z') \cos(k_y \cdot y') dy$$

$$\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', k_y, z, z') = 2 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', y - y', z, z') \cos(k_y \cdot y) dy$$

$$\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, k_y, z, z_A) = 2 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, y - y_A, z, z_A) \cos(k_y \cdot y) dy$$

Так как среда двумерна, нормаль n не зависит от координаты y , поэтому преобразование Фурье и дифференцирование перестановочны. Спектры $\tilde{q}_0$, $\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, k_y, z, z_A)$ и $\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', k_y, z, z')$ являются амплитудами пространственных гармоник с частотой k_y . Тогда косинус-преобразование Фурье интегрального уравнения (2) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0(x, k_y, z) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, y - y_A, z, z_A) \cos(k_y \cdot y) dy - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_L \int_0^\infty [q_0(x', y', z') \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', y - y', z, z')] * \cos(k_y \cdot y) dy dL \end{aligned} \quad (3)$$

Спектр свертки есть произведение спектров сворачиваемых функций. Следовательно,

$$\tilde{q}_0(x, k_y, z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, k_y, z, z_A) - \frac{2}{\pi} \int_L \tilde{q}_0(x', k_y, z') \frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', k_y, z, z') dL \quad (4)$$

Интегральное уравнение (4) для спектров вторичных источников на частоте k_y записывается не по поверхности Γ^0 , как в исходном уравнении, а по контуру L . Таким образом, уравнение (4) является косинус-преобразованием Фурье интегрального уравнения (2), которое имеет меньшую размерность по пространственной переменной.

Для однородного полупространства имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', y - y', z, z') = \frac{\rho}{\pi r^3} \mathbf{r} \mathbf{n}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, y - y_A, z, z_A) = \frac{\rho}{\pi r^3} \mathbf{r} \mathbf{n}$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ^0 в точке (x, y, z) . С учетом того, что $(\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}) = 0$, для спектров $\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', k_y, z, z')$ и $\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x_A, k_y, z, z_A)$ получаем следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial n_M^0} G(x, x', k_y, z, z') = \frac{1}{\pi} [(x - x') \cdot (n_x) + (z - z')(n_z)] \int_0^\infty \frac{\cos(k_y \cdot y)}{(R^2 + y^2)^{3/2}} dy \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial n^0} G(x, x_A, k_y, z, z_A) = \frac{1}{\pi} [(x - x_A)(n_x) + (z)(n_z)] \int_0^\infty \frac{\cos(k_y \cdot y)}{(R_A^2 + y^2)^{3/2}} dy \quad (6)$$

Где, $R^2 = (x - x')^2 + (z - z')^2$, $R_A^2 = (x - x_A)^2 + (z - z_A)^2$. Величины R, R_A - проекции на ось xOy соответственно, r_A .

В формулах (5)-(6) присутствует косинус-преобразование от функций вида $\frac{1}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$. Для этого преобразования имеем:

$$S(k_y, a) = \int_0^\infty \frac{\cos(k_y \cdot y)}{(a^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{k_y}{2a} K_1(a \cdot k_y) \quad (7)$$

где $K_1(x)$ - функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя 2-го рода) первого порядка. При численном решении интегрального уравнения (6) для расчета $\frac{\partial}{\partial n_M^0} \left(\frac{1}{|PM|} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial n_M^0} \left(\frac{1}{|AM|} \right)$ в однородном полупространстве были использованы библиотечные программы расчетной функции $K_1(x)$. Для того, чтобы уравнение (4) свести к СЛАУ, контуры L разбиваются на элементы Δl в пределах которых $q_0(x, y, z)$ считаются постоянными. После того, как найдена спектральная плотность вторичных источников l_0 , переходим к пространственным переменным с помощью обратного косинус-преобразования Фурье:

$$q_0(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{q}_0(x, k_y, z) \cos(k_y \cdot y) dk_y \quad (8)$$

Далее по найденной плотности вторичных зарядов рассчитываем потенциал электрического поля.

Численные результаты. Численное решение интегрального уравнения проводилось путем дискретизации формул (4) и (8) на логарифмической сетке по частоте. Для расчета косинус - преобразования Фурье мы ограничились конечной частью границы Γ^0 . На этой части границы была построена равномерная сетка. Расчет потенциала поля проводился в точках, соответствующих расположению измерительных электродов. Затем через разности потенциалов поля рассчитывалось кажущееся сопротивление среды, как принято в геофизических экспериментах.

По имеющимся геофизическим данным при достаточном удалении питающего электрода от рельефной структуры кривые кажущегося сопротивления должны иметь симметричный характер. Мы использовали эти данные для тестирования программы, меняя угол наклона рельефа и получали соответствующие симметричные кривые кажущихся сопротивлений. Расчеты проводились для углов наклона рельефа при значениях 5, 10, 15 градусах и получены соответствующие к ним кривые кажущихся сопротивлений (рисунок- 1).

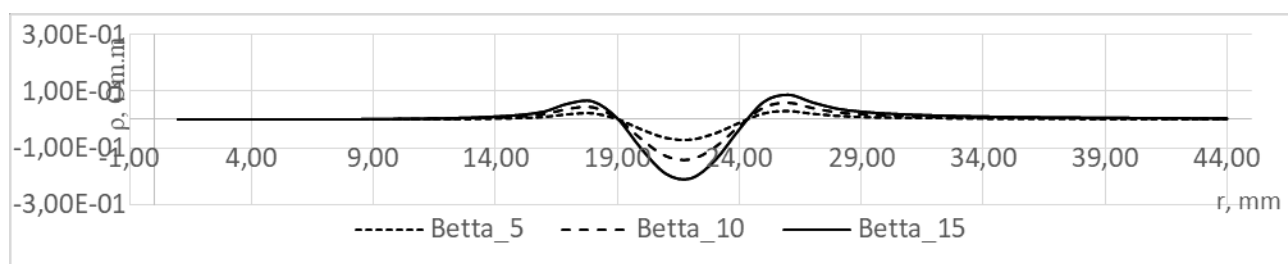


Рисунок-1. Кривые кажущихся сопротивлений в 5, 10, 15 градусах подъема рельеф

Следующим шагом тестирования была проверка реагирования кривых кажущихся сопротивлений на положение питающего электрода. Расчеты проводились для 15 градусов угла наклона, расстояние питающих электродов $L=2$, $L=3$, $L=5$.

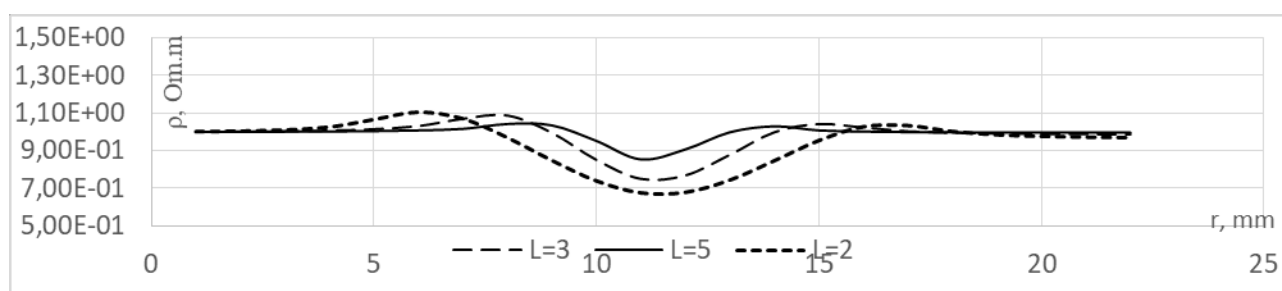


Рисунок-2. Кривые кажущихся сопротивлений при расстояниях между питающими электродами $L=2$, $L=3$, $L=5$.

Расчеты показывают, что при приближении питающего электрода к рельефу, симметрия кривых кажущихся сопротивлений нарушается. Чем мы дальше от питающего электрода, тем мы приближаем к однородному полю, где кривая кажущегося сопротивления симметрична. Таким образом геофизические методы тестирования кривых кажущихся сопротивлений правильны.

Выводы. Хотя рассматриваемая нами задача является двумерной по объекту и трехмерной по источнику, создаваемое в среде электрическое поле трехмерно. Использованный метод показал, что можно существенно сократить время для проведения расчетов электрического поля точечного источника в двумерных средах и понизить порядок интегрирования. Тестирование показало, что при приближении питающего электрода к рельефу, симметрия кривых кажущихся сопротивлений нарушается. Дальнейшие исследования будут связаны с расчетом добавления контактных границ и эффекта влияния рельефа для более сложных моделей сред. Конечная цель данного исследования – это моделирование сложных структур типа плотин и дамб и интерпретация ложных аномалий, связанных с рельефом.

Литература

1. L.B. Slihter, The interpretation of resistivity prospecting method for horizontal structures, Physics 4 (1933), 307–322.
2. S.S. Stefanescu, C. Shlumberger, Sur la distribution electrique potentielle dans une terrain a couches horizontals, homogenes et isotropes, J.Phys. Radium 7 (1930), 132–141.
3. Philip Kearey, Michael Brooks, Ian Hill. An Introduction to Geophysical Exploration. Third edition./Blackwell Science Ltd, - 2002 – 281 p.
4. Dahlin T. On the Automation of 2D Resistivity Surveying for Engineering and Environmental Applications / PhD thesis. – Lund University. – 1993. – P. 187.

5. Dahlin T. 2D resistivity surveying for environmental and engineering applications /First Break. –1996. – Vol. 14, no. 7. – P. 275–283.
6. A. Dey, H.F. Morrison, "Resistivity modeling for arbitrary shaped two-dimensional structures", *Geophysical Prospecting*, vol. 27, no. 1, pp. 106-136, 1979.
7. M.H. Loke, R.D. Barker, "Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections", *Geophysics*, vol. 60, no. 6, pp. 1682-1690, 1995.
8. M.H. Loke, R.D. Barker, "Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi- Newton method", *Geophysical Prospecting*, vol. 44, no. 1, pp. 131-152, 1996.
9. M.H. Loke, "Topographic modelling in resistivity imaging inversion", 62nd EAGE Conference and Technical Exhibition, Extended Abstracts, Glasgow, Scotland, 29 May - 2 June 2000.
10. E. Erdogan, I. Demirci, M.E. Candasayar, "Incorporating topography into 2D resistivity modeling using finite-element and finite-difference approaches", *Geophysics*, vol. 73, no.3, pp. 135-142, 2008.
11. I. Demirci, E. Erdogan, M.E. Candasayar, "Two-dimensional inversion of direct current resistivity data incorporating topography by using finite difference techniques with triangle cells: Investigation of Kera fault zone in western Crete", *Geophysics*, vol. 77, no. 1, pp. 67-75, 2012.
12. S. Penz, H. Chauris, D. Donno, C. Mehl, "Resistivity modeling with topography", *Geophys. J. Int.*, 194, pp. 1486–1497, 2013.
13. Bobachev A., Modin I., Pervago E., Shevnin V. Multi-electrode electrical sounding in a horizontally inhomogeneous media/Exploration Geophysics. Overview. JSC "Geoinformmark".– 1996. – Vol. 2. - P.50. (In Russian)
14. Modin I., Bobachev A. Electron tomography with standard electro complexes / Exploration and protection of mineral resources. – 2008. – № 1. – С. 43-47. (In Russian)
15. Альпин Л.М. Источники поля в теории электрической разведки // Прикладная геофизика. – М.,1947. - Вып. 3. – С. 56-200.
16. Hohmann G.W. Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling // *Geophysics*. – 1975. – Vol. 40, no. 2. – P. 309-324.
17. Электрическое зондирование геологической среды / ред. В.К. Хмелевской и В.А. Шевнин. - М.: изд. МГУ, 1988. – Ч. 1. –176 с.
18. Mukanova B., Mirgalikyzy T. (2015) Modeling the Impact of Relief Boundaries in Solving the Direct Problem of Direct Current Electrical Sounding. In: Danaev N., Shokin Y., Darkhan AZ. (eds) *Mathematical Modeling of Technological Processes. Communications in Computer and Information Science*, vol 549. Springer, Cham
19. Mirgalikyzy T., Mukanova B., Modin I. Method of Integral Equations for the Problem of Electrical Tomography in a Medium with Ground Surface Relief, *Journal of Applied Mathematic*, 2015, vol. 2015, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/207021>
20. Mukanova B., Modin I., The Boundary Element Method in Geophysical Survey, t: 4, 2017, Springer.
21. Модин И.Н., Яковлевым А.Г., Шевнин В.А. и Березина С.А. (Рогова), Электрическое зондирование геологической среды, Москва -1988.
22. М.А. Павлейно, В.М. Ромаданов, Спектральные преобразования в Matlab, СПб 2007
23. С.Е. Холодова, С.И. Перегудин., Специальные функции в задачах математической физики, ИТМО, СПб 2012
24. А.Б.Балакин , Три лекции по теории функций Бесселя, Учебное пособие к курсу методы математической физики, Казань-2009.
25. Тусупова М.Д., Применение высокопроизводительных технологий для задач электрического зондирования сред с рельефной поверхностью //Сборник материалов XII

Международной научной конференции студентов и молодых ученых "Наука и образование",
Л.Н.Гумилева. - Астана, 2017. - С.1671-1676.