

УДК 372.851

**ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА
ПО ТЕМЕ «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА СО ЗНАКОМ МОДУЛЯ» ДЛЯ
УЧАЩИХСЯ 9 КЛАССА С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ**

Исмаилов Элдар Умирзакович

eldar.20151513@gmail.com

Студент 4 курса механико-математического факультета

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель - Рахимжанова С.К.

Представленный элективный курс «Уравнения и неравенства со знаком модуля» предназначен для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики, рассчитан на 20 часов (3-я четверть). Он основан на знаниях и умениях, полученных учащимися при изучении математики в основной школе, и направлен на расширение знаний учащихся, повышение уровня математической подготовки, на развитие любознательности и познавательной активности.

Навыки решения уравнений и неравенств, содержащих модуль, и построение графиков элементарных функций, содержащих модуль, необходимы для подготовки к различным математическим конкурсам и олимпиадам, а также для поступления в дальнейшем в ведущие вузы мира. Данный курс предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, ориентацию на профессии, существенно связанные с математикой.

Основные цели и задачи курса:

Цель курса – развивать мышление, познавательную активность, формируя интерес к изучению математики, способствовать формированию у учащихся знаний, умений и навыков в преобразовании выражений, решения уравнений и неравенств, построении графиков элементарных функций, содержащих модуль.

Задачи курса:

- создать условия для мотивации к изучению математики;
- расширить и углубить знания по предмету;
- развивать творческие способности и коммуникативные навыки учащихся.

Требования к уровню подготовки учащихся

После изучения данного курса учащиеся должны **знать**:

- 1) Понятие «модуль».
- 2) Понятие «график функции», способы построения графика функций, содержащих модуль.
- 3) Понятие «уравнение», способы решения уравнений, содержащих модуль.
- 4) Понятие «неравенство», способы решения неравенств, содержащих модуль.
- 5) Понятие «система уравнений», способы решения систем уравнений, содержащих модуль.

Учащиеся должны **уметь**:

- 1) Строить графики функций, содержащих модуль.
- 2) Решать уравнения, содержащие модуль, различными способами.
- 3) Решать неравенства, содержащие модуль, различными способами.
- 4) Решать системы уравнений, содержащих модуль, различными способами.
- 5) Грамотно формулировать теоретический материал.
- 6) Излагать собственные рассуждения в ходе решения задач.

Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование разделов и тем	Количество часов
1	Определение модуля и простейшие уравнения и неравенства со знаком модуля (повторение)	2
2	Графики функций, содержащих выражения под знаком модуля.	2
3	Графики уравнений с модулями.	2
4	Уравнения, содержащие модуль.	4
5	Неравенства, содержащие модуль.	4
6	Решение систем уравнений и неравенств, содержащих модуль.	4
7	Тригонометрические уравнения, содержащие знак модуля	2

Методические рекомендации

Основным определением данного раздела является понятие модуля.

Для успешной реализации данного курса необходимо использовать различные приёмы и методы обучения: лекции, практические занятия, фронтальный опрос, самостоятельные работы, творческие задания. Данные формы работы позволяют развивать математическую речь, способность быстро находить рациональное решение.

Для проведения факультативных занятий используются задания повышенной сложности, в том числе, задания, предлагаемые абитуриентам при поступлении в ведущие вузы мира, а также олимпиадные задачи. Для иллюстрации осуществления обучения решению задач повышенной сложности рассмотрим план урока по теме:

«Графики функций, содержащих выражения под знаком модуля» (2 часа)

Вид урока: объяснения нового материала, систематизация и углубление знаний.

Цель урока:

Образовательная: методы построения графиков функций, содержащих модуль; умение применять технические средства обучения.

Развивающая: способствовать формированию умений классифицировать функции по методам построения графиков функции, применять эти методы для решений задач

Способствовать развитию математического кругозора, математического мышления.

Воспитательная: привить интерес к функциям, содержащим знак модуля, воспитывать ответственность, самоконтроль и уверенность в себе.

План урока

1. Организационная часть – объявление темы и цели урока.
2. Повторение теоретической части.
3. Объяснение нового материала.
4. Построение графиков функций объясненными методами.
5. Итог урока.
6. Домашнее задание.

Ход урока

1. Объявлена тема урока, цель урока. Обозначены основные вопросы темы:

- Понятие графика функций, содержащих модуль.
- Виды графиков функций, и их свойства.
- Построение графиков функций различных видов и исследование их свойств.
- Рациональные способы их построения.

2. Экспресс – опрос учеников по теме, построение графиков простейших функций со знаком модуля.

3. Объяснение нового материала.

4. Методы построения графиков функций.

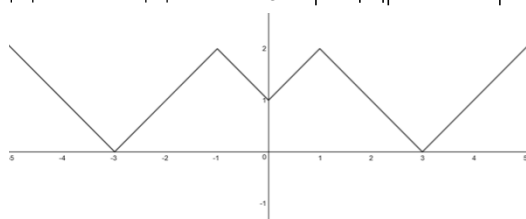
1. по определению модуля;
2. метод сдвига графика функции и использование определения модуля;
3. метод использования свойств графиков функции (четность, нечетность, периодичность);
4. метод интервалов.

1. **Первый метод.** График функции решаем методом последовательного применения определения модуля.

$$y = |2 - |1 - |x||$$

Решение: График искомой функции строим в такой последовательности

1) $y_1 = |x|$ 2) $y_2 = |x| - 1$ 3) $y_3 = |1 - |x||$ 4) $y_4 = |1 - |x| - 2|$ 5) $y_5 = |2 - |1 - |x||$,



Для построения графика используем технические средства обучения (ТСО) (интерактивная доска, компьютер, проектор).

Следующие примеры предлагаются для самостоятельного решения в классе по двум вариантам.

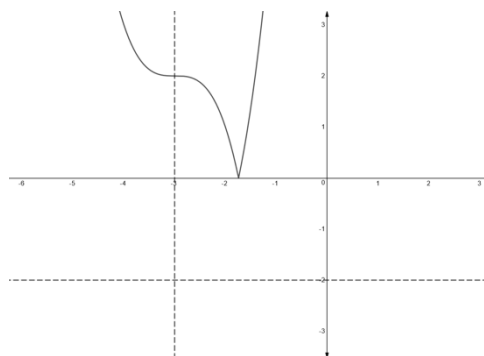
а) $y = ||x - 1| - 3| - 1$, б) $y = |2 - |2x - 1|| - 3$.

Для построения графиков этих функций, учащиеся также могут использовать ТСО.

2. **Второй метод.** Метод сдвига графика функции и использование определения модуля.

$$y = |(x + 3)^3 - 2|$$

Решение: Этот пример решаем с помощью метода сдвига графика функции. Строим график функции $y = x^3$. Ось Oy сдвигается на +3. Ось Ox сдвигается на +2. Потом нижняя часть параболы переносится (симметрична отражается) в верхнюю полуплоскость.



Для самостоятельного решения в классе предложены следующие задания.

а) $y = |x^2 - 4| + 3$ б) $y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 3 \right| - 2$

3. **Третий метод.** Метод использования свойств графиков функции (четность, нечетность, периодичность).

$$y = \frac{3|x|-2}{|x|-1}$$

Решение: Функция $y = \frac{3|x|-2}{|x|-1}$ - четная т.к.

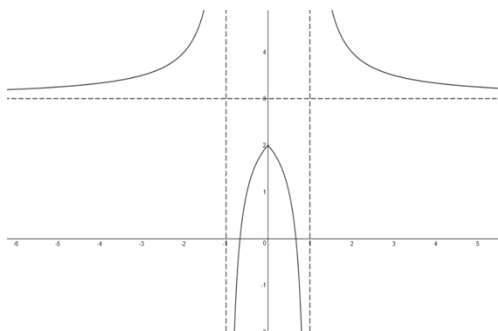
$$y(-x) = \frac{3|-x|-2}{|-x|-1} = \frac{3|x|-2}{|x|-1} = y(x)$$

Достаточно построить график данной функции для $x \geq 0$, а оставшаяся часть получается из уже построенной симметричным отображением относительно оси Oy.

Имеем для

$$y = \frac{3x-2}{x-1} = \frac{3x-3+1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}.$$

Поэтому график данной функции (для $x \geq 0$) получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$, сдвигом его вправо на 1 и вверх на +3, затем отсекаем отрицательную часть.



Следующие примеры предлагаются учащимся для самостоятельного решения по вариантам. Перед решением примеров обсуждается вопрос о свойствах функций и методе построения графика.

а) $y = \sqrt{\frac{2|x|-1}{|x|+1}}$, б) $y = \arcsin(|x|-1)$

4. Четвертый метод. Метод интервалов.

$$y = |4x-1| - |2x-3| + |x-2|$$

Решение:

Разберем

возможные

случаи.

$$4x-1=0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}, 2x-3=0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}, x-2=0 \Rightarrow x_3 = 2.$$

Поэтому рассмотрим такие случаи

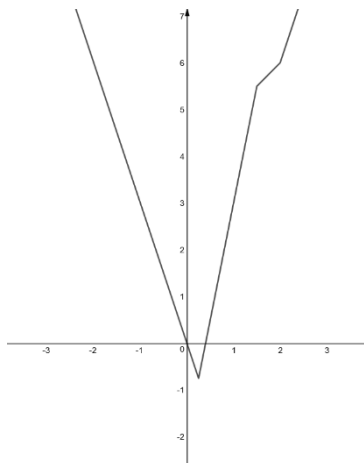
$$1) x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow y = -(4x-1) + (2x-3) - (x-2) = -3x$$

$$2) \frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow y = 4x-1 + (2x-3) - (x-2) = 5x-2$$

$$3) \frac{3}{2} < x \leq 2 \Rightarrow y = 4x-1 - (2x-3) + (x-2) = x+4$$

$$4) x > 2 \Rightarrow y = 4x-1 - (2x-3) + (x-2) = 3x$$

Теперь легко построить график данной функции.



Аналогично строим графики следующих функций самостоятельно.

а) $y = |x^2 + 2x| + |x^2 - 5x + 6|$ б) $y = |2x - 4| + |6 + 3x|$

5. Отдельно рассмотрим тригонометрические и обратные тригонометрические функции, стоящие под знаком модуля.

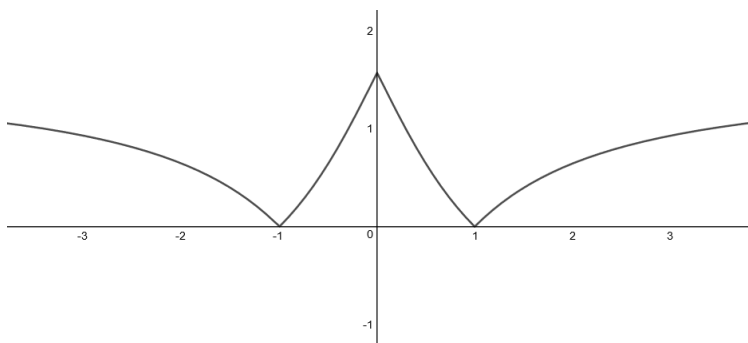
7) $y = \left| \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} \right|$

Решение: Предварительно построим график функции $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Чтобы эта функция имела смысл должно быть $\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \leq 1$. Это неравенство справедливо для всех действительных x . Т.к. функция четная, то рассмотрим ее только для $x \geq 0$.

Имеем $\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Тогда $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ (т.к. $x \geq 0$). Поскольку $0 \leq y < \pi$, то $0 \leq \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{y}{2} \geq 0$. Поэтому мы получим $\frac{y}{2} = \operatorname{arctg} x$ или $y = 2 \operatorname{arctg} x$. График функции $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ получается из графика $y = 2 \operatorname{arctg} x$ с растяжением по оси Oy в 2 раза.

Т.к. $\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Дальнейшее построение

проводится так 1) $y_1 = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 2) $y_2 = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 3) $y = \left| \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} \right|$.



6. Итог урока

В ходе урока, учащиеся познакомились с несколькими методами построения графиков функций, содержащий знак модуль, научились анализировать и делать выводы. Также пользовались ТСО для быстрого построения графиков.

5. Для домашнего задания предлагаются следующие примеры.

$$1) y = |2x - 3| + |x + 2| - |x|, \quad 2) y = ||x| - 1| - 2, \quad 3) y = \operatorname{tg} \frac{|x| - 1}{2}, \quad 4) y = \frac{1}{|x| + 1}$$

$$5) y = |x - 1| + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}|x + 1|, \quad 6) y = |x - 1| + |x|, \quad 7) y = \frac{|x| - 2}{|x| - 3}.$$

Список использованных источников

1. Сариев А. и др. Сборник заданий для подготовки к письменному экзамену по математике за курс 9-летней школы с углубленным изучением математики. – Алматы, 1999. – 79 с.
2. В. В. Ткачук. Математика абитуриенту. – Москва. Издательство МЦНМО, 2007. – 966 с.
3. Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательной школы. – Алматы, 2013. – 192 с.
4. Ажгалиев О.А., Ажгалиев Ш.О. Решения задач из сборника заданий для проведения письменного экзамена по математике в 9 и 11 классах с углубленным изучением математики. – Астана, 2001. – 206 с.