ӘОЖ 519.64

ЕКІ НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Қалыбай Аида Сұлтанмұратқызы
aida_kalybai@mail.ru
Л. Н. Гумилев атындағы ЕҰУ механика – математика факультетінің магистранты,
Нұр-Султан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі - Тлеулесова А. Б.

$[0,T]$ аралығында импульсті түрткілі сызықты шекаралық есепті қарастырайық.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ t \in [0,T) \setminus \{\theta_1, \theta_2\} \quad (1)$$

$$B_0 x(0) - C_0 x(T) = d,\ d \in R^n \quad (2)$$

$$B_1 x(\theta_1 - 0) - C_1 x(\theta_1 + 0) = p_1,\ p_1 \in R^n \quad (3)$$

$$B_2 x(\theta_2 - 0) - C_2 x(\theta_2 + 0) = p_2,\ p_2 \in R^n \quad (4)$$

мұндағы $A(t)$ – $(n\times n)$ - өлшемді $\left[0,T\right]$ кесіндісінде бөліктенген-үзіліссіз матрица, $f(t)$ – n - өлшемді $\left[0,T\right]$ кесіндісінде бөліктенген-үзіліссіз вектор-функция, B_0, B_1, C_0, C_1 – $(n\times n)$ өлшемді тұрақты матрицалар.

Импульсті түрткілі екі нүктелі шеттік есептер [1] өте жақсы қарастырылған. Бірақ, бұл есептерді тек фундаментальді матрицалар терминінде қарастырған. Фундаментальді матрицаларды көп жағдайда құру мүмкін емес. Параметрлеу әдісін [2] 1989 жылдары Д.С.Жумабаев ұсынды. Бұл мақалада импульсті түрткілі шеттік есепке параметрлеу әдісін қолданып, оның бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарты алынды.

$$[0,T)=\bigcup_{r=1}^{3}[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,3},\ t_0=0,\ t_1=\theta_1,\ t_2=\theta_2,\ t_3=T,$$

$x(t)$ сығылуын $x_r(t)$ деп аламыз, мұнда $t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,3}$.

$$\frac{dx_r}{dt}=A(t)x_r+f(t),\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,3}, \tag{5}$$

$$B_0x_1(0)-C_0\lim_{T\to 0}x_3(T)=d,\ d\in R^n, \tag{6}$$

$$B_1\lim_{t\to\theta_1}x_1(t)-C_1x_1(\theta_1+0)=p_1,\ p_1\in R^n, \tag{7}$$

$$B_2\lim_{t\to\theta_2}x_2(t)-C_2x_2(\theta_2+0)=p_2,\ p_2\in R^n, \tag{8}$$

$x(t)$ функциясының $\left[t_{r-1},t_r\right)$, $r=\overline{1,3}$, аралығына сығылуын $x_r(t)$ деп белгілейік. $\lambda_r \triangleq x_r[t_{r-1}]$, деп белгілеп, және $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r=\overline{1,3}$ алмастыруларын жасап, келесідей параметрі бар шеттік есепті аламыз:

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)[u_r+\lambda_r]+f(t),\ t\in[t_{r-1},t_r),\ r=\overline{1,3}, \tag{9}$$

$$u_r(t_{r-1})=0,\ r=\overline{1,3}, \tag{10}$$

$$B_0\lambda_1-C_0\lambda_3+C_0\lim_{t\to T-0}u_3(t)=d,\ d\in R^n, \tag{11}$$

$$B_1\lambda_1+B_1\lim_{t\to t_1-0}u_1(t)-C_1\lambda_2=p_1,\ p_1\in R^n, \tag{12}$$

$$B_2\lambda_2+B_2\lim_{t\to t_2-0}u_2(t)-C_2\lambda_3=p_2,\ p_2\in R^n, \tag{13}$$

Мұнда (5)-(8) есебінен (9)-(13) есебінің айырмашылығы (9)-(13) есебінде бастапқы Коши шарты бар. Содан соң (9), (10) -ды $[t_{r-1},t_r)$ аралығында интегралдап, Вольтердің екінші ретті теңдеуін аламыз:

$$u_r(t)=\int_0^t A(\tau)u_r(\tau)d\tau+\int_0^t A(\tau)\lambda_r(\tau)d\tau+\int_0^t f(\tau)d\tau \tag{14}$$

$\nu=3$ болғанда алатынымыз :

$$u_r(t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_2)\left[\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)(u_r(\tau_3)+\lambda_r)d\tau_3+\int_{t_{r-1}}^{t}f(\tau_3)d\tau_3\right]d\tau_2d\tau_1+$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_2)\lambda_r d\tau_2d\tau_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t}f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\lambda_r d\tau_1+$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t}f(\tau_1)d\tau_1=\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_2)\int_{t_{r-1}}^{t}A(\tau_1)(u_r(\tau_3)d\tau_3d\tau_2d\tau_1+$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_2)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)(\lambda_r(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_2)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)(f(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_2)\lambda_r d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\lambda_r d\tau_1 +$$

$$+\int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1)d\tau_1,$$

және келесі белгілеулерді енгіземіз.

$$G = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_2)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)(u_r(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1$$

$$F = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_2)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)(f(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1)d\tau_1$$

$$D = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_2)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)(\lambda_r(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_2)\lambda_r d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\lambda_r d\tau_1$$

мұндағы ν ішкі суперпозиция саны.

$$u_r(t) = G(u_r, t) + F(t) + D(t)\lambda_r \qquad (15)$$

$t \to t_{r-0}$ $u_r(t)$ функцияның шегін табамыз

$$\lim_{t \to t_{r-0}} u_r(t) = G(u_r, t_r) + F(t_r) + D(t_r)\lambda_r \qquad (16)$$

Табылған шекті (11) - (13) қою арқылы төмендегіні аламыз:

$$B_0\lambda_1 + C_0\left[I + D(t_3)\right]\lambda_3 = d - C_0G(u_3, t_3) - C_0F(t_3) \qquad (17)$$

$$B_1\left[I + D(t_1)\right]\lambda_1 - C_1\lambda_2 = p_1 - B_1G(u_1, t_1) - B_1F(t_1) \qquad (18)$$

$$B_2\left[I + D(t_2)\right]\lambda_2 - C_2\lambda_3 = p_2 - B_2G(u_2, t_2) - B_2F(t_2) \qquad (19)$$

$$G = \left[-C_0G(u_3, t_3), -B_1G(u_1, t_1), -B_2G(u_2, t_2)\right]$$

$$F = \left[d - C_0F(t_3), p_1 - B_1F(t_1), p_2 - B_2F(t_2)\right]$$

$$Q_\nu(t)\lambda = -F_\nu(t) - G_\nu(u, t) \qquad (20)$$

(17)-(19) теңдеулердің сол жағынан құралған $Q_\nu(t)$ матрицасының түрі төмендегідей болады:

$$Q = \begin{vmatrix} B_0 & 0 & C_0[I + D(t_3)] \\ B_1[I + D(t_1)] & -C_1 & 0 \\ 0 & B_2[I + D(t_2)] & -C_2 \end{vmatrix}$$

0-ші қадам: а) $Q_\nu(t)$ матрицасы қайтарымды болсын, онда λ параметрінің $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)})$ бастапқы 0-ші жуықтауын $Q_\nu(t)\lambda = -F_\nu(t)$ теңдеуінен табамыз.

б) $\lambda^{(0)} \in R^n$ векторының компоненттерін қолданып және $[t_{r-1}, t_r)$ аралықтарында $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1,3}$, болғанда

$$\begin{cases} \dfrac{du_r}{dt} = A(t)u_r + A(t)\lambda_r^{(0)} + f(t), \\ u_r[t_{r-1}] = 0, r = \overline{1,3} \end{cases}$$

Коши есебін шешіп, $u_r^{(0)}(t), r=\overline{1,3}$ функциясын табамыз.

1-ші қадам: а) Табылған $u^{(0)}[t]=(u_1^{(0)}(t),u_2^{(0)}(t),u_3^{(0)}(t))$ функцияларын (20) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің оң жағына қойып, $Q_\nu(t)\lambda=-F_\nu(t)-G_\nu(u^{(0)},t)$ теңдеуінен $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\lambda_3^{(1)})$ параметрін табамыз.

б) $u^{(1)}[t]=(u_1^{(1)}(t),u_2^{(1)}(t),u_3^{(1)}(t))$ функциялар жүйесінің компоненттерін

$$\begin{cases}\dfrac{du_r}{dt}=A(t)u_r+A(t)\lambda_r^{(1)}+f(t),\\ \quad u_r[t_{r-1}]=0, r=\overline{1,3}\end{cases}$$

Коши есебін шешіп табамыз.

Осы процесті $k-рет$ қайталап, алгоритмнің $k-$ шы қадамында $(\lambda^{(k)},u^{(k)}[t])$, $k=0,1,2,\ldots$ жұптар тізбегін аламыз.

Теорема 1. Қандай да бір $h_1\rangle 0,h_2\rangle 0,h_3\rangle 0: h_1+h_2+h_3=T$ және $\nu\in N$ болғанда $Q_\nu(h_1,h_2,h_3)$: $R^n\to R^n$ матрицасы қайтарымды болып және келесідей теңсіздіктері орындалсын:

а) $$\left\|[Q_\nu(h_1,h_2,h_3)]^{-1}\right\|\le\sigma_\nu(h_1,h_2,h_3),$$

b) $$q_\nu(h_1,h_2,h_3)=\sigma_\nu(h_1,h_2,h_3)\max\left[\max_{i=1,2}h_i\|B_i\|,h_3\|C\|\right]\times$$
$$\times\left\{\exp(\alpha\max_{i=1,2}h_i)-\sum_{j=0}^{\nu}\frac{1}{j!}(\alpha\max_{i=1,2}h_i)^j\right\}\langle 1.$$

Онда $(\lambda^{(k)},u^{(k)}(t))$ тізбектер жұбы $k\to\infty$ ұмтылғанда (9)-(13) есебінің $(\lambda^{(*)},u^{(*)}(t))$ жалғыз шешіміне жинақталады және келесі бағалаулар орынды:

$$\left\|\lambda^{(*)}-\lambda^{(k)}\right\|\le\frac{[q_\nu(h_1,h_2,h_3)]^k}{1-q_\nu(h_1,h_2,h_3)}\left\|\lambda^{(1)}-\lambda^{(0)}\right\|\le\frac{[q_\nu(h_1,h_2,h_3)]^k}{1-q_\nu(h_1,h_2,h_3)}\times$$
$$\times\sigma_\nu(h_1,h_2,h_3)\max\left[\max_{i=1,2}h_i\|B_i\|,h_3\|C\|\right]\frac{1}{\nu!}(\alpha\max_{i=1,2}h_i)^\nu R_\nu(h_1,h_2,h_3), \quad (21)$$

$$\left\|u_r^{(*)}(t)-u_r^{(k)}(t)\right\|\le[\exp(\alpha\max_{i=1,2}h_i)]\frac{[q_\nu(h_1,h_2,h_3)]^k}{1-q_\nu(h_1,h_2,h_3)}\times$$
$$\times\sigma_\nu(h_1,h_2,h_3)\max\left[\max_{i=1,2}h_i\|B_i\|,h_3\|C\|\right]\frac{1}{\nu!}(\alpha\max_{i=1,2}h_i)^\nu R_\nu(h_1,h_2,h_3),\ r=\overline{1,3}, \quad (22)$$

мұндағы

$$R_\nu(h_1,h_2,h_3)=[\exp(\alpha\max_{i=1,2}h_i)]\sigma_\nu(h_1,h_2,h_3)\times$$
$$\times\max\left\{1+h_3\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}(\alpha h_3)^j,1+\max_{i=1,2}\|B_i\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{j!}\left(\alpha\max_{i=1,3}h_i\right)^j\right\}\times$$
$$\times\max\left(\|d\|,\|f\|_1,\max_{i=1,3}\|p_i\|\right)\max_{i=1,3}h_i+\exp\left(\alpha\max_{i=1,3}h_i\right)\|f\|_1\max_{i=1,3}h_i.$$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев:Вища школа, 1987. - 285 с.
2. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной Краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл.

матем. И матем. физ. - 1989. - Т. 29, №1. - С. 50-66.

3. Тлеулесова А. Б. О корректной разрешимости периодической краевой задачи с импульсным воздействием // Тез. межд. конф. "Дифференциальные уравнения", посвящ. 100-летию академика К.П. Персидского. Алматы. Ин-т матем. НАН РК. 24-26 сент. 2003. - Алматы, 2003. С. 38 - 39.